



TITLE:

# Successive Higher-harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback(カオスとその周 辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

池田, 研介; 近藤, 啓二; 秋元, 興一

---

CITATION:

池田, 研介 ...[et al]. Successive Higher-harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback(カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1982, 39(2): B29-B31

ISSUE DATE:

1982-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90784>

RIGHT:

Successive Higher-harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback  
 の異った値を得るはずである。これより分岐図を得ることができる。同一位相でない場合でも、  
 $[S_i, S_{i+1}]$  の図を作れば、周期解ならば Limit cycle を、Chaos 解であるならばストレンジ・アトラクターを形成するはずである。

## References

- 1) 最近の総合的なレポートとして、K. Tomita, Phys. Report **86** (1982) 113.
- 2) Y. Yamaguchi, T. Katayama and C. Ishii, to be published in Phys. Lett. A: T. Katayama, Y. Yamaguchi, F. Furukawa and C. Ishii, submitted to Phys. Rev. B (Rapid Commun.).
- 3) L-T 方程式の詳しい説明として、次の文献を参照して下さい。  
 A. J. Leggett and S. Takagi, Ann. Phys. (NY) **106** (1977) 79.  
 T. Katayama, K. Ooiwa and C. Ishii, J. Low Temp. Phys. **40** (1980) 1.
- 4) M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19** (1978) 25.
- 5) P. Manneville and Y. Pomeau, Phys. Lett. **75A** (1979) 1.  
 Y. Pomeau and P. Manneville, Comm. Math. Phys. **74** (1980) 189.
- 6) D. Ruelle and F. Takens, Comm. Math. Phys. **20** (1971) 167.

## Successive Higher-harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback

京大・理 池田研介・近藤啓二  
 山口大・医短 秋元興一

次のクラスの遅延微分方程式

$$dx(t)/dt = -x(t) + f(\mu; x(t-t_R)), \quad (1)$$

で記述される系で普遍的に見出される新しい型の逐次分岐現象を報告する。系(1)の例は非線形光学、音響系、制御理論、生理学、生態学等々広汎な分野で見出されている。

筆者達が扱ってきた非線形光学（光双安定系）の例では、<sup>1)</sup>

$$f(\mu; x) = \pi\mu(1 + 2B\cos(X-X_0)), \quad (2)$$

であるので、まづこの特殊な場合に対する結果をのべる。 $\mu$  の増大と共に  $\mu > \mu_A$  で定常解が Hopf 分岐後、周期  $T_0 (\approx 2t_R)$  の矩形波発振がおきる。この解は  $\mu = \mu_F$  で逐次周期倍分

岐ののちにカオス化（矩型波カオス）し、更に  $\mu$  が増大すると特性時間がはるかに短い“発達したカオス”に遷移する。この2つのカオスの遷移の過程で、次の様な逐次分岐現象が見出された。即ち  $\mu > \mu_B$  で（カオス状態の）基本周期が、図1(a)~(d)に示すように  $T_0 \rightarrow T_0/3 \rightarrow T_0/5 \rightarrow \dots \rightarrow T_0/n_{\max}$  ( $n_{\max}$  : 奇数) と不連続的に変化し、パワースペクトルの最大ピーク位置が  $\omega_0 (= 2\pi/T_0) \rightarrow 3\omega_0 \rightarrow \dots \rightarrow n_{\max}\omega_0$  と不連続的にジャンプする逐次分岐現象がおきる。我々はこのような現象を逐次高調波分岐（successive higher-harmonic bifurcations）と呼び、周期  $T_0$  の解を基本波解、 $T_0/n$  の解 ( $n \geq 3$ ) を高調波解と呼ぶ。

この分岐現象が、従来の逐次分岐現象と異なるのは、それがヒステリシスを伴う1次相転移の連鎖であるという点にある。高調波解が基本波解と共存する理由は、(1)が  $t_R \rightarrow \infty$  の形式的極限で差分マップ

$$x(t) = f(\mu; x(t - t_R)), \quad (3)$$

に帰着し、しかも(3)が  $\mu$  の変化と共に逐次周期倍分岐を示すことと密接に関係している<sup>2)</sup>。実際(3)と(1)の関係を考察することから、パラメタ  $\mu_A$ ,  $\mu_F$ ,  $\mu_B$  が夫々マップ(3)の2周期解分岐点、ファイゲンバウム点、2周期バンドカオス消滅点に対応し、又共存する高調波解の数、従って  $n_{\max}$  が  $t_R$  に比例せねばならぬことがわかる。

この様な考察から推論できる最も重要な点は、逐次高調波分岐が、(1)のクラスの遅延微分方程式に普遍的に見出されると予想できることである。実際次の様な  $f(\mu; x)$  の関数形： $\mu x$  ( $1-x$ )、 $\mu x^2(1-x)$ 、 $\mu x e^{-x}$ 、 $\mu x/(1+x^4)$  の全てに対して逐次高調波分岐が観測されている。

最近、Hopf 達は光双安定系でみられる逐次分岐現象の詳細を実験的に観測した<sup>3)</sup>。彼らは、矩型波カオス状態の周波数が、基本周波数の奇数高調波にロックされることを報告している。これは逐次高調波分岐のあらわれと考えられる。

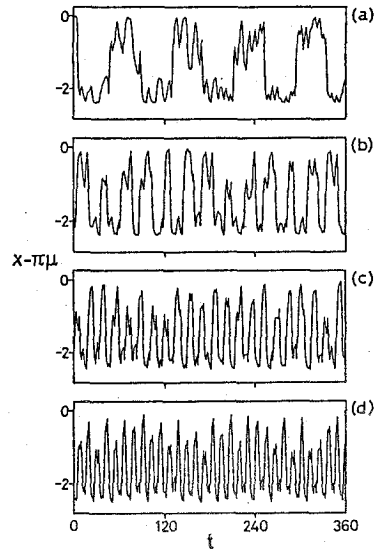


図1 逐次高調波分岐に伴う波形の変化  
(a) 基本波 (b) 3倍高調波  
(c) 5倍高調波 (d) 7倍高調波

- A. カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合)  
 B. 力学系におけるトポロジー

- 1) K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 709.
- 2) K. Ikeda, K. Kondo and O. Akimoto, to be published.
- 3) F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. A **25** (1982) 2172.

- A. カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合)  
 B. 力学系におけるトポロジー

京大・理 上江洌 達 也

A. カオティックな振舞を示すパラメーターで、ローレンツモデルに周期外力 ( $A \cos Bt$ ) を加えると (式 (A・1)), 系は様々な応答を示し, ( $A, B$ ) 空間で, カオス相, 周期解相の分布は極めて複雑になる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= -\sigma(x-y) \\ \frac{d}{dt}y &= rx - y - xz \\ \frac{d}{dt}z &= xy - bz + A \cos Bt \\ \sigma &= 10.0, \quad r = 28.0, \quad b = 2.6667\end{aligned}\tag{A・1}$$

この報告では、両相の境界でどのような現象が生じているのか、すなわち、カオス相への遷移について議論する<sup>2)</sup>。次の3つのタイプの遷移が存在する。

- I.  $2^n$ -バイファケーション (→バンド・マーキング→対称カオス)
- II. ホモクリニック・インターセクションの生成によるインターミッテンシー
- III. ヘテロクリニック・インターセクションの生成によるインターミッテンシー

以下、これらについて順に述べていく。

- I.  $2^n$  バイファケーション,  $B = 6.0$  (固定),  $A = 114.9 \sim 116.5$

$A$  の値を 114.9 から上げていくと  $1T_F$  周期解から周期倍バイファケーションが順次生じ,  $64T_F$  の周期解までみつかった。 ( $T_F$  は外力の周期  $\frac{2\pi}{B}$ )。  $S(l)$  を  $l$  周期毎のストロボ・マップとしたとき,  $2^k$  周期領域で,  $dS(2^k)$  の固有値は, 近似的に次のように書ける。

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^{(k)} &= C^{(k)} \pm \sqrt{\{C^{(k)}\}^2 - B^{(k)}} \\ C^{(k)} &= -\sqrt{a^{(k)}} (A - A_c^{(k)})\end{aligned}\tag{A・2}$$